

DIGITALNA LOGIKA

Minimizacija logičkih
funkcija

Minterm

- S dvije ulazne promjenljive veličine imamo četiri različite operacije logičkih umnožaka:
- $m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $m_1 = \overline{A} \cdot B$, $m_2 = A \cdot \overline{B}$, $m_3 = A \cdot B$
- Primjer: tablica stanja sa jednom jedinicom na izlazu

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Minterm – logička operacija koja na izlazu daje jedinicu (**1**) za jednu ulaznu kombinaciju

- Ostvaruje se operacijom I-za kombinaciju iz tablice minterm

- $m_2 = A \cdot \overline{B}$

Minterm

- Primjer: realizacija minterma m_2 s tri ulazne varijable
- Minterm m_2 = izlaz je 1 za ulaznu kombinaciju 010
- (binarna kombinacija koja odgovara dekadskoj vrijednosti 2-
zato je m_2)
- Logička jednadžba minterma: $m_2 = \overline{A} B \overline{C}$

A	B	C	m_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Minterm

- Kad je potrebno ostvariti logičku operaciju koja na izlazu daje jedinicu (1) za više ulaznih kombinacija, koristi se **logički zbroj** minterma

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$Y = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

Zadatak 1: Napisati logički izraz za složeni sklop na temelju pripadajuće tablice stanja, te nacrtati pripadajuću logičku funkciju.

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Rješenje:

A	B	Y	
0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	1	1	$\overline{A} \cdot B$
1	0	0	
1	1	1	$A \cdot B$

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B$$

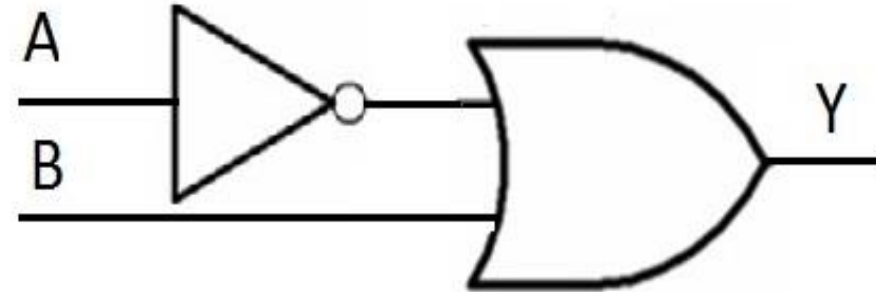
Ako je moguće, složenu logičku operaciju treba pojednostavniti.

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B$$

$$Y = \overline{A} + A \cdot B$$

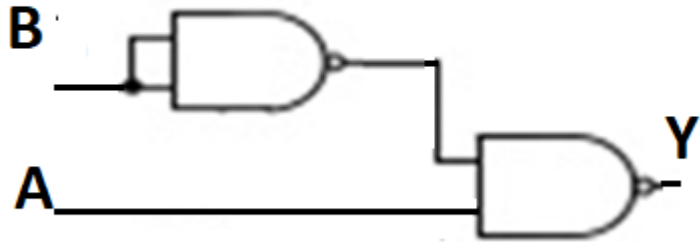
$$Y = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B)$$

$$Y = \overline{A} + B$$

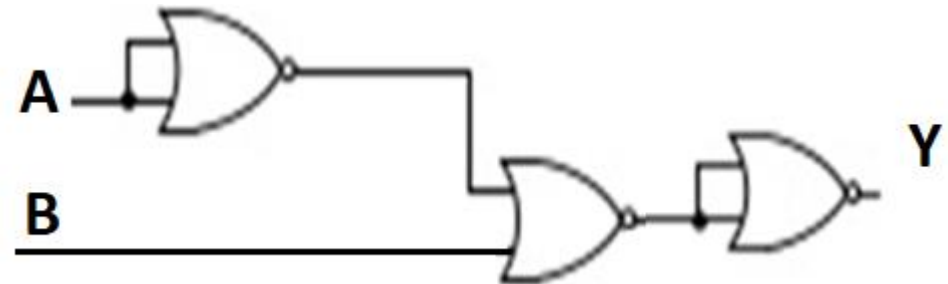


Realizirati dobivenu funkciju samo sa NI/ NII logičkim sklopom

$$Y = \overline{A \overline{B}}$$



$$Y = \overline{\overline{A} + B}$$



Zadatak2: Napisati tablično zadanu funkciju kao sumu minterma i kao produkt maksterma, te skraćeni oblik kanonskog zapisa funkcije

A	B	C	f	mintermi	Makstermi
0	0	0	1	m_0	M_0
0	0	1	0	m_1	M_1
0	1	0	0	m_2	M_2
0	1	1	1	m_3	M_3
1	0	0	1	m_4	M_4
1	0	1	0	m_5	M_5
1	1	0	1	m_6	M_6
1	1	1	0	m_7	M_7

➤ **mintermi**

➤ $m_0 = \bar{A} \bar{B} \bar{C}$

➤ $m_3 = \bar{A} B C$

➤ $m_4 = A \bar{B} \bar{C}$

➤ $m_6 = A B \bar{C}$

➤ **Makstermi**

➤ $M_1 = A + B + \bar{C}$

➤ $M_2 = A + \bar{B} + C$

➤ $M_5 = \bar{A} + B + \bar{C}$

➤ $M_7 = \bar{A} + \bar{B} + C$

Rješenje:

Funkcija kao suma minterma

$$f = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} B C + A \bar{B} \bar{C} + A B \bar{C} = \Sigma (0, 3, 4, 6)$$

Funkcija kao produkt Maksterma

$$\begin{aligned} f &= (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C) = \\ &= \Pi(1, 2, 5, 7) \end{aligned}$$

Zadatak 3: Na osnovu tablice stanja napisati logički izraz pa nacrtati dobivenu funkciju.

A	B	C	Y	
0	0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	0	

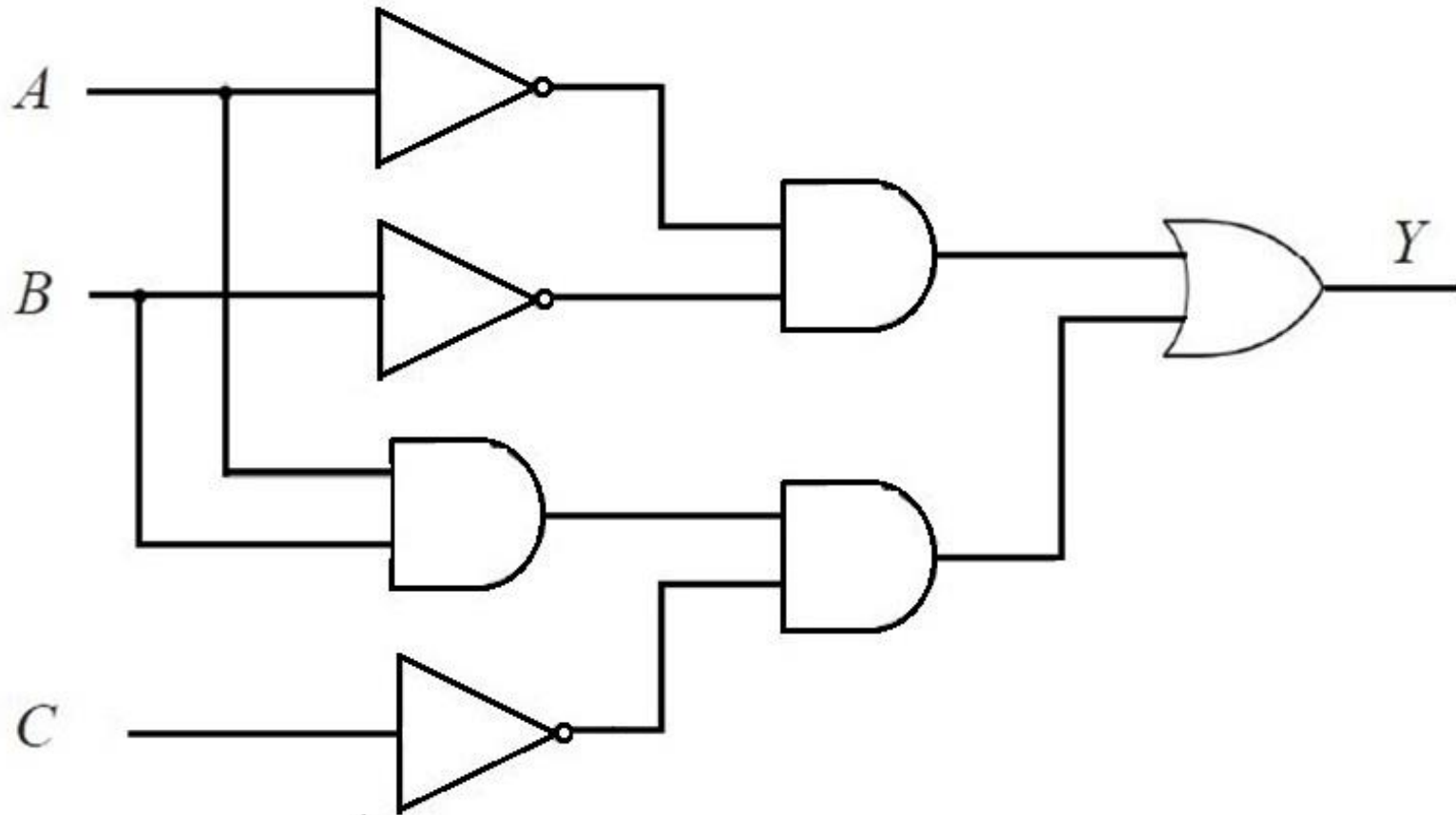
$$f(A,B,C) = \Sigma(0,1,6)$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + C) + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Realizacija logičke funkcije samo sa I; ILI i NE logičkim sklopovima



Zadatak 4: Za koju je trojku ulaznih varijabli izraz istinit (prvo minimizirati)?

$$\overline{A \cdot (\overline{B + C}) \cdot (\overline{A + \overline{B \cdot C}})}$$

Rješenje:

$$\overline{A \cdot (\overline{B + C}) \cdot (A + \overline{B \cdot C})}$$

$$\overline{A} + \overline{(\overline{B + C})} \cdot \overline{A \cdot \overline{B \cdot C}}$$

$$\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} \cdot B \cdot C)$$

$$\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{A} \cdot B \cdot C + C \cdot \overline{A} \cdot B \cdot C$$

$$\overline{A} \cdot B \cdot C$$

A	B	C	\overline{A}	Y
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

$$\overline{A} \cdot B \cdot C$$

Zadatak 5: Na osnovu tablice stanja napisati logički izraz te nacrtati pripadajuću shemu.

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

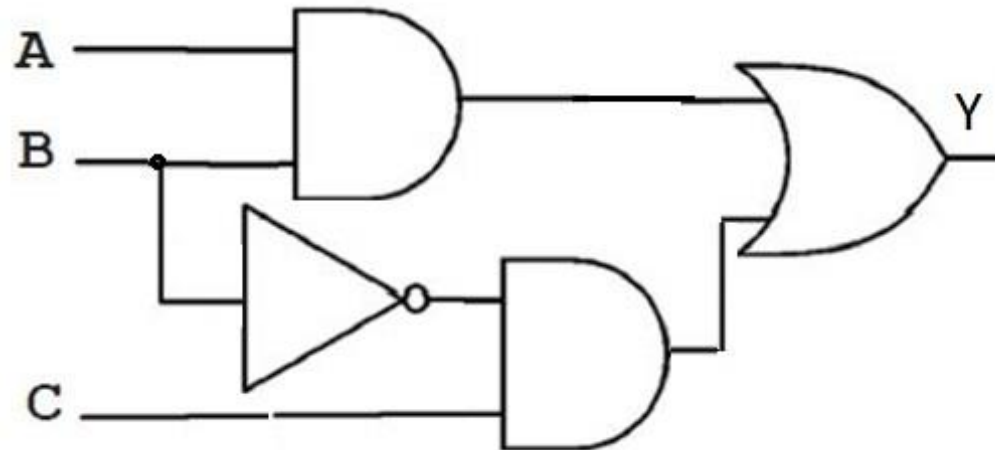
$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
$A \cdot \overline{B} \cdot C$
$A \cdot B \cdot \overline{C}$
$A \cdot B \cdot C$

$$f(A,B,C) = \Sigma(1,5,6,7)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$\bar{B} \cdot C \cdot (\bar{A} + A) + A \cdot B \cdot (\bar{C} + C)$$

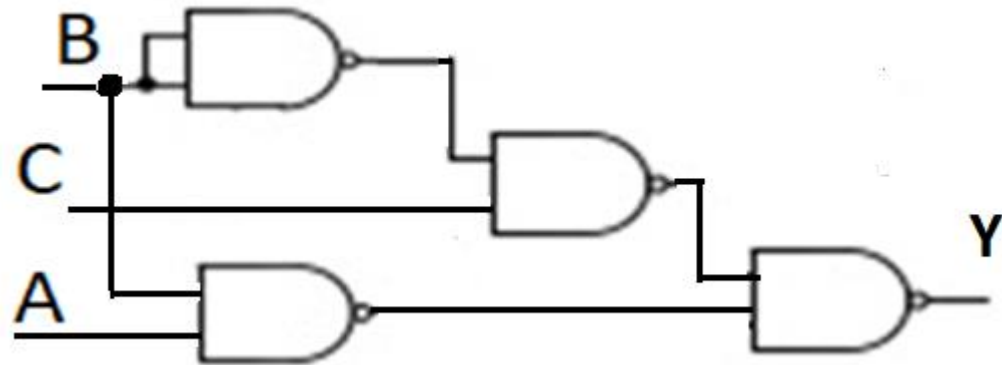
$$\bar{B} \cdot C + A \cdot B$$



Realizacija logičke funkcije samo sa NI logičkim sklopom

$$Y = \overline{\overline{B} \cdot C + A \cdot B}$$

$$Y = \overline{\overline{B} \cdot C} \cdot \overline{A \cdot B}$$



Zadatak 7: Prikazati funkciju tablicom kombinacija

$$f(A,B,C) = A \bar{B} + ABC + A \bar{B} C$$

$$f1 = A \bar{B}$$

$$f2 = ABC$$

$$f3 = A \bar{B} C$$

A	B	C	\bar{A}	\bar{B}	\bar{C}	$f1$	$f2$	$f3$	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1

7a.Prikazati funkciju kao sumu minterma

$$f(A,B,C) = A \bar{B} + ABC + A \bar{B} C$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>f</i>	<i>mintermi</i>
0	0	0	0	<i>m</i> 0
0	0	1	0	<i>m</i> 1
0	1	0	0	<i>m</i> 2
0	1	1	0	<i>m</i> 3
1	0	0	1	<i>m</i> 4
1	0	1	1	<i>m</i> 5
1	1	0	0	<i>m</i> 6
1	1	1	1	<i>m</i> 7

$$f(A,B,C) = A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + ABC$$

$$f(A,B,C) = \Sigma(\textcolor{brown}{4}, \textcolor{brown}{5}, \textcolor{brown}{7})$$

7b.Prikazati funkciju kao produkt maksterma

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>f</i>	<i>Makstermi</i>
0	0	0	0	M_0
0	0	1	0	M_1
0	1	0	0	M_2
0	1	1	0	M_3
1	0	0	1	M_4
1	0	1	1	M_5
1	1	0	0	M_6
1	1	1	1	M_7

$$f(A,B,C) = \Pi(0,1,2,3,6)$$

$$f = M_0 * M_1 * M_2 * M_3 * M_6$$

$$f = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)$$

Zadatak 8: Zadana je logička funkcija f u obliku tablice kombinacija. Napisati logičku funkciju u oba kanonska oblika. Primjenom zakona logičke algebre pokazati da su obje funkcije jednake

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Rješenje:

$$f(A,B,C) = \Sigma(1,3,4,6,7)$$

$$f(A,B,C) = \Pi(0,2,5)$$

Zadatak 9: Napisati logičku funkciju
 $f(A,B,C,D)=\Sigma(1,4,7,8,12)$

A	B	C	D	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

A	B	C	D	f
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Zadatak 10: Napisati logičku funkciju $f(A,B,C,D) = \Pi(0,3,4,7,10)$

A	B	C	D	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0

A	B	C	D	f
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Zadatak 11: Primjenom algebarskih transformacija pretvoriti u kanonski oblik ove logičke funkcije:

$$f_1 = AB + A\bar{C}$$

$$f_2 = \overline{ABC}$$

$$f_1 = A*B*(C+\bar{C}) + A*(B+\bar{B})*\bar{C}$$

$$= A*B*C + A*B*\bar{C} + A*\bar{B}*\bar{C} + A*\bar{B}*C$$

$$= m_4 + m_6 + m_7$$

$$= \Sigma(4, 6, 7)$$

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Zadatak12:Zadanu logičku funkciju izraziti u obliku sume minterma(kanonski zapis). Primijeniti algebarske transformacije.

$$f(ABC)=AB+\bar{A}C$$

$$=AB(C+\bar{C})+\bar{A}(B+\bar{B})C$$

$$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C$$

$$\begin{matrix} 111 & 110 & 011 & 001 \end{matrix}$$

$$f(A,B,C)= \Sigma(1,3,6,7)$$

Zadatak 13: Zadanu funkciju primjenom algebarskih transformacija prikazati kao sumu standardnih produkata

$$\begin{aligned}f_1 &= \bar{A}\bar{C} + BD + \bar{C}\bar{D} \\&= A*1*\bar{C}*1 + 1*B*1*D + 1*1*\bar{C}*D \\&= A*(\underline{B} + \underline{\bar{B}})*\underline{\bar{C}}*(\underline{D} + \underline{\bar{D}}) + (\underline{A} + \underline{\bar{A}})*\underline{B}*(\underline{C} + \underline{\bar{C}})*\underline{D} + (\underline{A} + \underline{\bar{A}})*\underline{\bar{B}}*\underline{\bar{C}}*\underline{D} \\&= ABCD + ABCD + ABCD + ABCD + ABCD + ABCD + ABCD + ABCD \\&= m_{13} + m_8 + m_9 + m_{12} + m_{15} + m_7 + m_5 + m_1 \\&= \Sigma(1, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 15)\end{aligned}$$

Zadatak14:Zadanu logičku funkciju izraziti u obliku sume minterma

$$\begin{aligned}f(A,B,C,D) &= ACD + BCD + A\bar{C}\bar{D} + BD \\&= AC(D + \bar{D}) + BCD + BD \\&= AC + BD(C + 1) = AC + BD\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} \\f(A,B,C,D) &= \Sigma(5,7,10,11,13,14,15)\end{aligned}$$

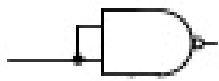
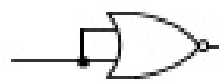
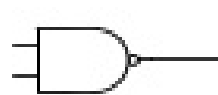
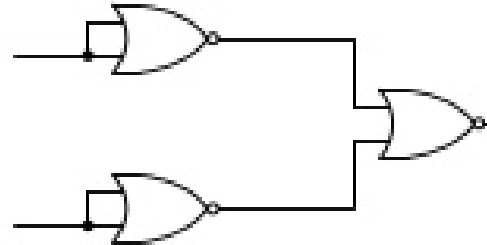
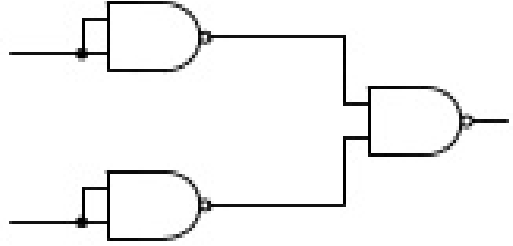

Kako logičke funkcije realizirati sa jednim tipom logičkih sklopova?

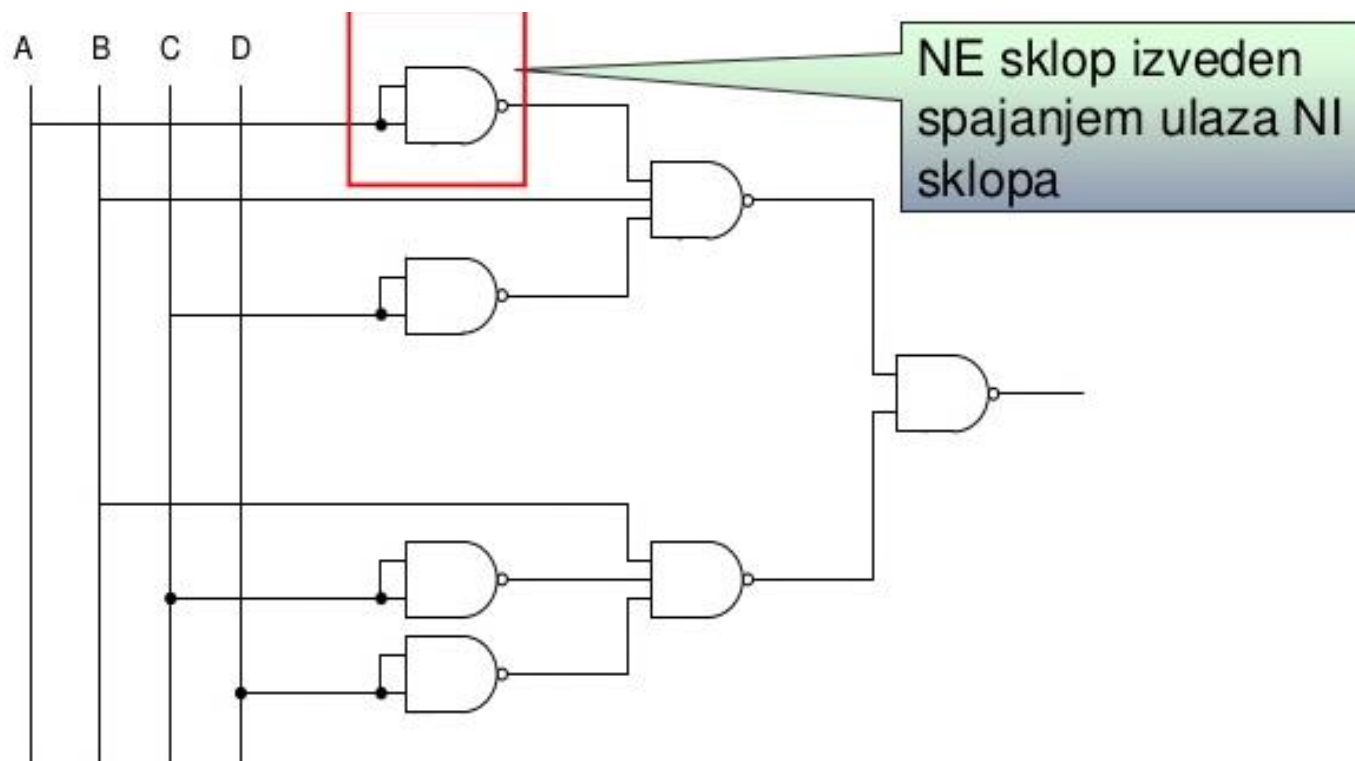
- moguće samo sa NI ; NII logičkim sklopovima
- -možemo koristiti dvije metode:
- A) tablično

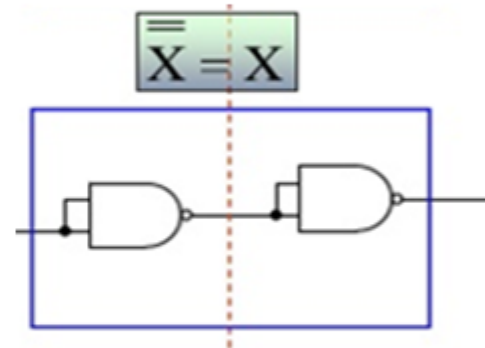
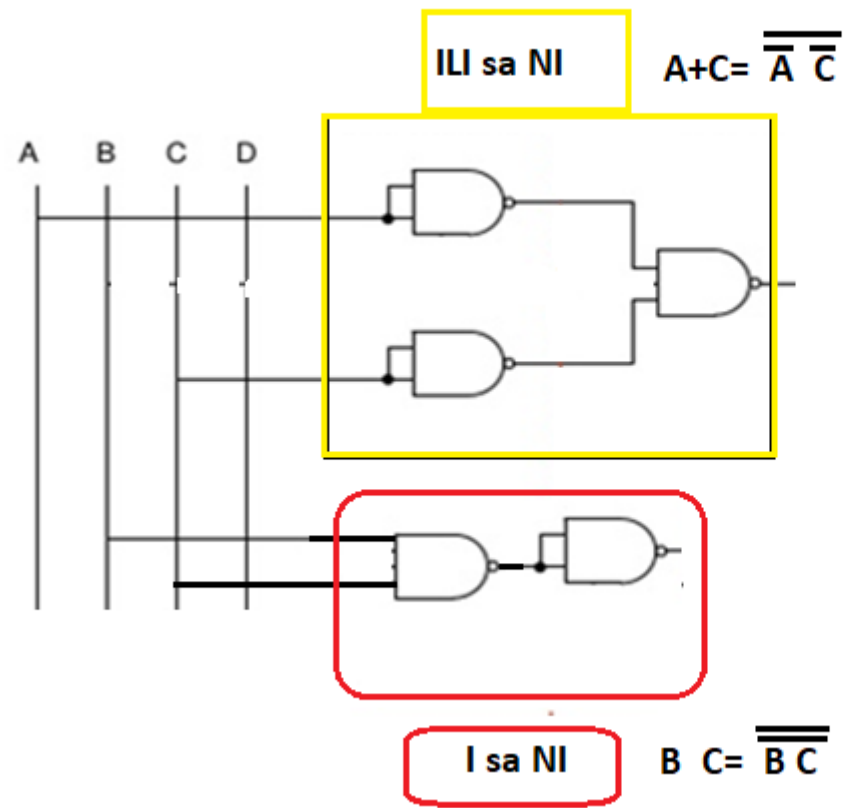
Sklop se u prvom koraku realizira osnovnim logičkim sklopovima (I, II, NE)

Zatim se svaki od sklopova zamjeni s odgovarajućom kombinacijom NI, odnosno NII sklopova prema narednoj tablici:

Kako pomoću NI i NILI realizirati I, ILI i NE logički sklop...

	NI	NILI
NE		
I		
ILI		





b)algebarski

Na zadanu funkciju prvo se primjeni dvostruki komplement sa čime ona ne mijenja značenje

Zatim se primjeni jedno od De Morganovih pravila

$$Y = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{B} \overline{C} \overline{D} = \overline{\overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{B} \overline{C} \overline{D}}} =$$
$$= \overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C} \cdot \overline{B} \overline{C} \overline{D}}$$

Dvostruki
komplement

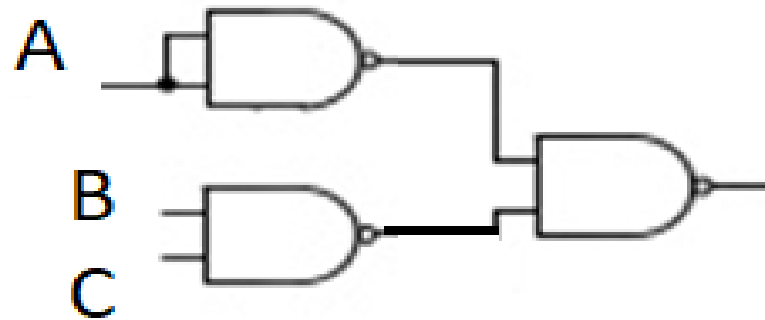
De Morganovo
pravilo

$$= \overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C} \cdot \overline{B} \overline{C} \overline{D}}$$

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Zadatak 15: Uporabom sklopova NI nacrtati shemu sklopa za logičku operaciju $Y = A + B \cdot C$

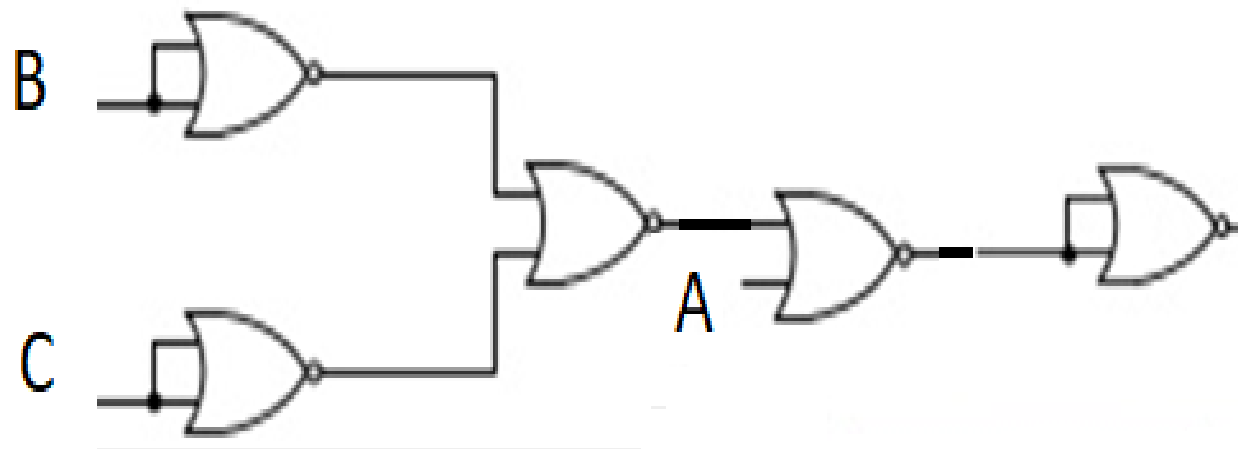
$$Y = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$$



Zadatak 16: Uporabom sklopova NLI nacrtati shemu sklopa za logičku operaciju $Y = A + B \cdot C$

$$Y = A + \overline{\overline{B} + \overline{C}}$$

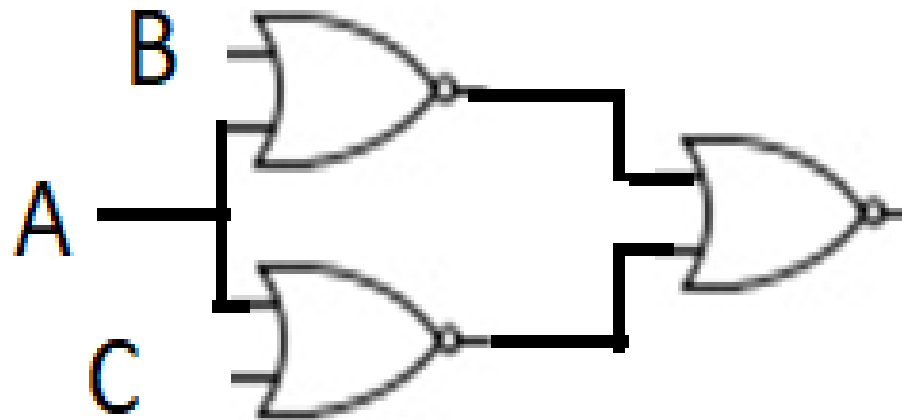
$$Y = A + \overline{\overline{\overline{B} + \overline{C}}}$$



Zadatak 17: Nacrtati shemu sklopa izvedenog samo uporabom sklopova NILI za logičku operaciju:

$$Y = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$Y = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{(A + C)}}$$



Zadaci za vježbu:

- 1. Na temelju zadane tablice stanja napisati logičku funkciju pomoću: a) sume minterma;
- b) produkta maksterma. Minimizirati funkcije pravilima logičke algebre,
- te je nacrtati samo sa NI logičkim sklopovima.

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

- 2. Algebarskim transformacijama proširiti zadane funkcije i
- napisati kanonski oblik funkcije i skraćeni zapis iste, te pripadajuću tablicu stanja:
- a) $f(ABC) = \overline{A}B + \overline{A}C$
- b) $f(ABC) = \overline{A}BC + AB(\overline{C} + B)$